

DETERMINAREA ANALITICA A MOMENTELOR DE INERȚIE MECANICE AXIALE PRIN METODA PENDULULUI FIZIC

1. CONSIDERAȚII TEORETICE:

Principiul inerției este unul din principiile fizicii clasice utilizat pentru a descrie mișcarea corpurilor. **Inerția reprezintă proprietatea unui corp, de a-și păstra poziția (viteză constantă) atât timp cât asupra lui nu se acționează cu o forță exterioară.**

Momentul de inerție mecanic al unui sistem material în raport cu un plan, o axa sau un pol, poate fi definit ca o sumă a produselor dintre masele particulelor (finite sau elementare) care alcătuiesc sistemul și pătratul distanțelor de la aceste particule la planul, axa sau polul considerat. Momentele de inerție mecanice pot fi clasificate astfel:

1. Momente de inerție mecanice **planare** față de axele de coordonate:

$$J_{xoy} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i^2; \quad J_{yoz} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i^2; \quad J_{zox} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i^2;$$

2. Momentele de inerție mecanice **axiale** față de axele de coordonate:

$$J_x = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2); \quad J_y = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2); \quad J_z = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2);$$

3. Momentul de inerție mecanic **planar față de originea O:**

$$J_0 = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2);$$

4. Momentele de inerție mecanice **centrifugale** față de planele sistemului de coordonate:

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i \cdot y_i; \quad J_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i \cdot z_i; \quad J_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i \cdot z_i;$$

Proprietățile momentelor de inerție mecanice pot fi sintetizate astfel:

- Momentele de inerție (planare, axiale sau polare) sunt mărimi pozitive care pot fi compuse sau descompuse după regulile adunării. Ele devin nule numai atunci când sistemul material este conținut în planul, pe axa sau în polul la care ne referim;
- Momentele de inerție centrifugale pot fi pozitive, negative sau nule în funcție de sistemul de referință ales și de repartiția maselor în raport cu acesta;
- Momentele de inerție axiale sunt egale cu suma momentelor de inerție în raport cu două plane rectangulare ce trec prin acea axă. De exemplu:

$$J_x = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i z_i^2$$

- Momentul de inerție polar poate fi calculat în următoarele moduri:

- suma momentelor de inerție în raport cu trei plane rectangulare ce trec prin acel punct

$$J_0 = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = J_{yoz} + J_{xoz} + J_{xoy}$$

- suma momentelor de inerție în raport cu un plan și o axă normală la acel plan în polul considerat

$$J_0 = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) + \sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i^2 = J_z + J_{xoy} = J_x + J_{yoz} = J_y + J_{xoz}$$

- semi-suma momentelor de inerție axiale în raport cu trei axe rectangulare ce trec prin acel punct

$$J_0 = \frac{1}{2} \cdot (J_x + J_y + J_z)$$

În cazul sistemelor materiale continue, sumele din formulele de mai sus se vor transforma în integrale. Momentul de inerție mecanic axial J_{Δ} este o mărime ce caracterizează inerția corpului într-o mișcare de rotație în jurul unei axe.

$$J_{\Delta} = \int \delta^2 \cdot dm \quad (1)$$

δ - este distanța de la elementul de masă dm la axa (Δ) (vezi fig. 1).

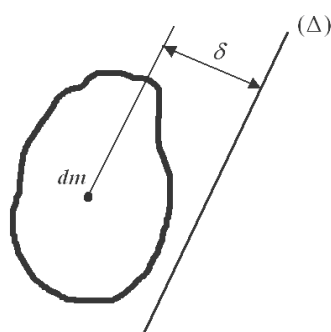


Fig. 1 Distanța de la elementul de masă la axa (Δ)

Momentul de inerție în raport cu axa (Δ_1) paralelă cu (Δ) , care trece prin centrul maselor C al corpului de masă M (fig. 2) se poate calcula folosind teorema lui Steiner.

Teorema lui Steiner poate fi enunțată astfel:

Momentul de inerție al unui sistem de puncte materiale față de o axă oarecare (Δ_1) este egal cu momentul de inerție al sistemului față de o axă (Δ) care este paralelă cu (Δ_1) și care trece prin centrul de greutate al sistemului, adunat cu produsul dintre masa totală a sistemului și pătratul distanței dintre cele două axe.

$$J_{\Delta_1} = J_{\Delta} + M\delta^2 \quad (2)$$

unde δ - reprezintă distanța dintre axele (Δ) și (Δ_1)

2. DESCRIEREA DISPOZITIVULUI

- **Stativ**
- **Disc** (experimentul 1) pentru care se cunoaște:
 - ✓ Masa $\Rightarrow m = 5[\text{kg}]$,
 - ✓ Distanța d dintre axa de rotație și centrul de masă al discului $\Rightarrow d = 0,135[\text{m}]$
- **Bielă** (experimentul 2) pentru care se cunoaște:
 - ✓ Masa $\Rightarrow m = 3[\text{kg}]$,
 - ✓ Distanța a dintre cele 2 axe de rotație $\Rightarrow d = 0,325[\text{m}]$

2.1 Experimentul 1 - Determinarea momentului de inerție mecanic axial prin metoda oscilațiilor pendulului fizic pentru corp la care se cunoaște poziția centrului maselor

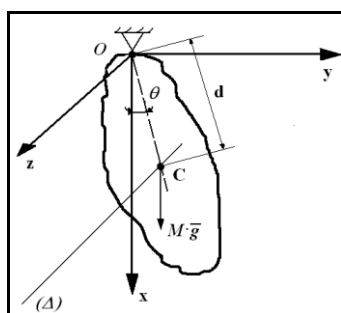


Fig. 2 Determinarea momentului de inerție mecanic axial prin metoda oscilațiilor pendulului fizic

Se știe că perioada oscilațiilor unui pendul fizic (pentru $\theta \leq 6^\circ$) este dată de relația:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{Mgd}} \quad (3)$$

M – masa pendulului fizic;

J_z – momentul de inerție în raport cu axa Oz ;

d – distanța de la centrul de greutate al pendulului la axa de rotație (fig. 3);

g – accelerația gravitațională ($9,81 [\text{m/s}^2]$).

Pe baza acestor formule și cunoscând perioadele micilor oscilații T calculează:

$$J_z = Mgd \frac{T^2}{4\pi^2} \quad (4)$$

$$J_{\Delta} = J_z - Md^2 \quad (5)$$

2.2 Experimentul 2 - Determinarea momentului de inerție mecanic axial prin metoda oscilațiilor pendulului fizic pentru corp la care nu se cunoaște poziția centrului maselor

În cazul în care nu se cunoaște poziția centrului maselor, dacă corpul admite o axă de simetrie (fig. 4 și 5), se aleg două posibilități de suspendare a corpului studiat pe axa de simetrie realizându-se un pendul fizic cu axele de rotație O_1z_1 , respectiv O_2z_2 .

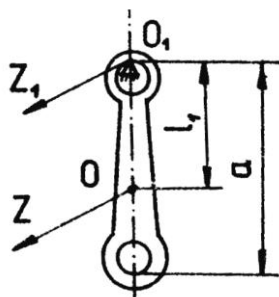


Fig. 4 Prima poziție a bieiei

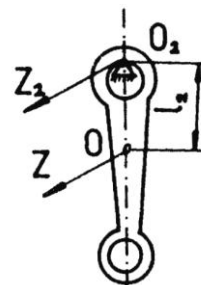


Fig. 5 A doua poziție a bieiei

Se imprimă pendulului mici oscilații și se măsoară perioadele T_1 și T_2 corespunzătoare. Se calculează ℓ_1 respectiv ℓ_2 care reprezintă distanța de la punctul de sprijin al pendulului fizic până la punctul în care se presupune concentrată întreaga masă a pendulului și care oscilează cu aceeași perioadă T_1 sau T_2 .

$$\ell_1 = \frac{g}{4\pi^2} T_1^2 ; \quad \ell_2 = \frac{g}{4\pi^2} T_2^2 . \quad (5)$$

Se calculează momentul de inerție mecanic în raport cu axa de rotație:

$$J_z = Ma \frac{(\ell_1 - a)(\ell_2 - a)(\ell_1 + \ell_2 - a)}{(\ell_1 + \ell_2 - 2a)^2} \quad (7)$$

3. EFECTUAREA LUCRĂRII:

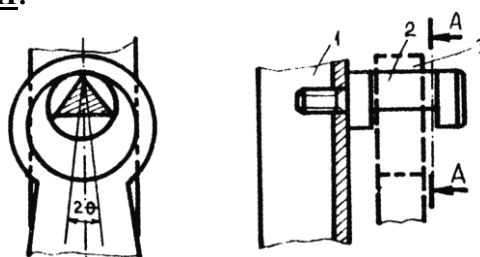


Fig. 6 Detaliu privind modul de amplasare a bieiei în timpul efectuării experimentului

1. Se determină masa M și distanța d dintre centrul de greutate și axa de rotație.
2. Se așează corpul al cărui moment de inerție mecanic axial trebuie determinat pe tija 2 (fig. 6) și i se aplică un impuls astfel încât corpul să realizeze mici oscilații de o parte și de alta a axei tijei. Se cronometrează perioada T a micilor oscilații. Se fac cinci încercări.
3. Se calculează perioada medie și momentele de inerție mecanice axiale J_z și J_Δ .
4. Rezultatele se trec în Tabelul 1.

Tabelul 1

Nr.	g [m/s ²]	M [kg]	d [m]	T		J_{Δ}		ε [%]
				[s]	val. medie [s]	$J_z = Mgd \frac{T^2}{4\pi^2}$	$J_{\Delta} = J_z - Md^2$	
1.								
2.								
3.								
4.								
5.								

6. Știind că $J_{\Delta \text{ teoretic}} = 0,1147 \text{ [kg}\cdot\text{m}^2]$ (pentru disc $J_{\Delta \text{ teoretic}} = \frac{MD^2}{8}$, D – diametrul discului), se va calcula eroarea relativă ε .
7. Se determină masa M a corpului și distanța a între axele de rotație.
8. Se cronometrează perioadele T_1 și T_2 ale micilor oscilații în jurul lui O_1z_1 și O_2z_2 .
9. Se fac cinci încercări diferite. Se stabilesc perioadele medii.
10. Se calculează lungimile pendulului fizic cu relația 6, apoi J_z cu utilizând relația 7.
11. Rezultatele se trec în Tabelul 2.

Tabelul 2

Nr. det.	g [m/s ²]	M [kg]	a [m]	Perioada oscilațiilor				ℓ ₁ [m]	ℓ ₂ [m]	J _z [kg·m ²]
				T ₁		T ₂				
				[s]	val. medie	[s]	val. medie			
1.										
2.										
3.										
4.										
5.										