

Determinarea eforturilor din barele unei grinzi cu zăbrele

1. Scopul lucrării:

Se consideră grinda de zăbrele din *fig. 1* și se cere să se determine:

1. Dacă grinda este static determinată;
2. Reacțiunile din *A* și *B* (din articulația plană și reazemul simplu);
3. Eforturile din bare prin metoda analitică a izolării nodurilor;
4. Să se verifice eforturile din barele 4, 5, 6 prin metoda analitică a secțiunilor.

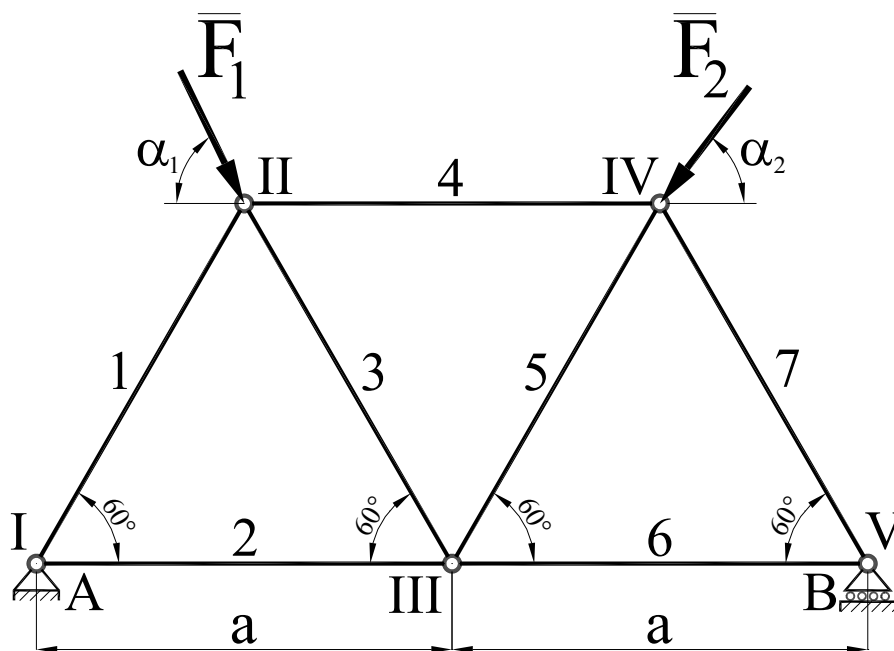


Figura 1

$$a = 6,5 + n \text{ [cm];}$$

$$F_1 = 300 + 10 \cdot n \text{ [daN];}$$

$$F_2 = 400 + 20 \cdot n \text{ [daN];}$$

$$\alpha_1 = 45 + 2 \cdot n \text{ [°];}$$

$$\alpha_2 = 45 - 2 \cdot n \text{ [°];}$$

unde: n – este numărul de ordine al studentului.

2. Considerații teoretice:

1. *Grinzile cu zăbrele plane* sunt sisteme de bare rectilinii rigide legate între ele prin articulații numite noduri situate în același plan. Pentru a-și îndeplini funcțiile constructive, grinzile cu zăbrele trebuie să îndeplinească condițiile de indeformabilitate geometrică și să aibă o poziție invariabilă față de corpul de reazem, de care sunt legate, sub acțiunea sistemului de forțe exterioare la care sunt supuse.

Pentru ca rigiditatea grinzii cu zăbrele să fie asigurată, trebuie să existe o relație bine determinată între numărul barelor și numărul nodurilor din care este alcătuită.

$$b = 2 \cdot m - 3 \quad (1)$$

b – numărul barelor;

m – numărul nodurilor.

2. Pentru ca grinda să se comporte ca un solid rigid sub acțiunea forțelor exterioare coplanare, numărul necunoscutelor ce apar la determinarea reacțiunilor exterioare nu trebuie să depășească cifra trei, în caz contrar problema devine static nedeterminată. Din acest motiv grinzile cu zăbrele au de regulă o articulație plană (punctiformă) și un reazem simplu (cărucior mobil).

Pentru determinarea reacțiunilor se suprimă legăturile și se înlocuiesc cu forțele de legătură (fig. 2).

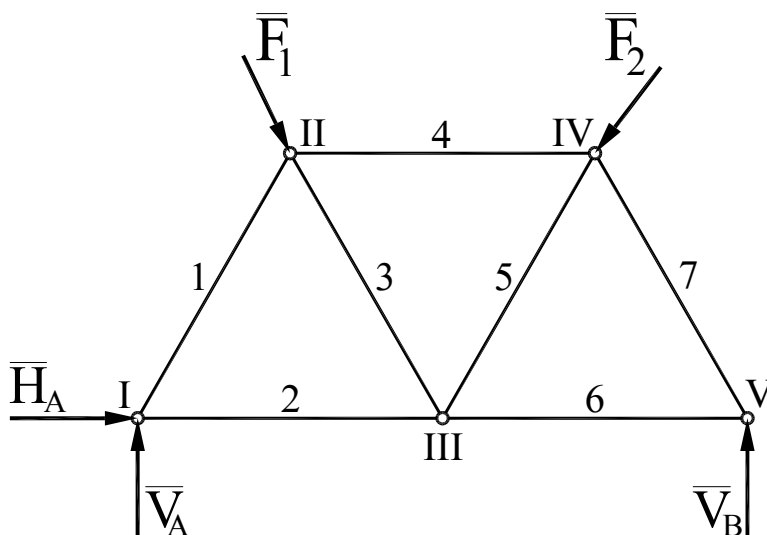


Figura 2

Se adoptă un sistem de referință. Se reduce sistemul de referință. Se reduce sistemul de forțe exterioare și de legătură în raport cu originea sistemului de referință. Echilibrul este asigurat dacă:

$$\begin{cases} R_x + L_x = 0 \\ R_y + L_y = 0 \\ M_z + \mu_z = 0 \end{cases} \quad (2)$$

unde: R - rezultanta forțelor de legătură;

M - momentul resultant al forțelor exterioare;

μ - momentul resultant al forțelor de legătură.

Rezolvând sistemul rezultă reacțiunile căutate.

3. Se izolează fiecare nod. Se introduc toate forțele exterioare și de legătură. De-a lungul fiecărei bare concurentă în nod se introduce o forță interioară de întindere. Se reduce sistemul de forțe în raport cu originea unui sistem de referință ce se află în nod și astfel pentru echilibru vor fi două ecuații de proiecție.

$$\begin{cases} R_x + L_x + T_x = 0 \\ R_y + L_y + T_y = 0 \end{cases} \quad (3)$$

unde: R - rezultanta forțelor exterioare ce acționează în nod;

L - rezultanta forțelor de legătură din același nod;

T - rezultanta tensiunilor concurente în nod.

Pentru un sistem cu „ n ” noduri se va obține un sistem cu $2 \cdot n$ ecuații. Se rezolvă sistemul. Soluția sistemului constituie mărimea și sensul tensiunilor ce apar în bare. Dacă o tensiune rezultă cu semnul „+” este întindere în bară, dacă rezultă cu semnul „-” este compresiune.

4. Se face o secțiune prin grindă, astfel încât să se secționeze trei bare, care să nu fie toate concurente sau toate paralele. În barele secționate se introduc tensiuni. Conform teoremei echilibrului părților, fiecare parte trebuie să fie în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare, de legătură și interioare direct aplicate. Se adoptă un sistem de referință. Se face reducerea sistemului de forțe în raport cu originea sistemului de referință folosind relațiile:

$$\begin{cases} R_x + L_x + T_x = 0 \\ R_y + L_y + T_y = 0 \\ M_z + \mu_z + M_{Tz} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

unde: R - rezultanta forțelor exterioare aplicate părții analizate;

L - rezultanta forțelor de legătură aplicate părții analizate;

T - rezultanta forțelor interioare rezultate în urma secționării;

M - momentul resultant al forțelor exterioare aplicate părții;

μ - momentul resultant al forțelor de legătură;

M_T - momentul resultant al forțelor de legătură interioare apărute în urma secționării.

Se rezolvă sistemul de trei ecuații cu trei necunoscute și rezultă tensiunile din barele secționate.

Observații:

1. Se pot scrie trei ecuații de momente în raport cu trei puncte necoliniare.
2. Se pot scrie două ecuații de momente și una de proiecții.

3. Desfășurarea lucrării:

1. Se folosește *rel. 1* și *fig. 1*.

2. Se utilizează *rel. 2* și *fig. 2*.

Vom avea sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} H_A + F_1 \cdot \cos \alpha_1 - F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0 \\ V_A + V_B - F_1 \cdot \sin \alpha_1 - F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 0 \\ 2a \cdot V_B - \frac{a}{2} \cdot F_1 \cdot \sin \alpha_1 - \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot F_1 \cdot \cos \alpha_1 - \frac{3a}{2} \cdot F_2 \cdot \sin \alpha_2 + \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

După efectuarea calculelor vom obține: H_A , V_A , V_B .

3. Nodurile I, II, III, IV, V sunt reprezentate în fig. 3, 4, 5, 6, 7. Pentru fiecare nod se formează un sistem de două ecuații conform *rel. 3*, astfel se rezolvă sistemul de $2 \cdot n$ ecuații și rezultă tensiunile din bare.

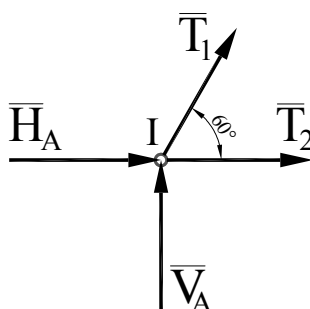


Figura 3

$$\text{I. } \begin{cases} H_A + T_2 + T_1 \cdot \cos 60^\circ = 0 \\ V_A + T_1 \cdot \sin 60^\circ = 0 \end{cases};$$

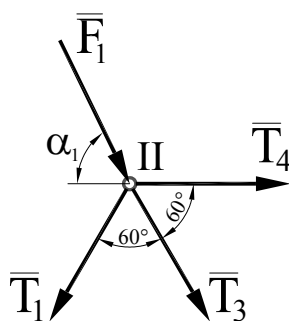


Figura 4

$$\text{II. } \begin{cases} F_1 \cdot \cos \alpha_1 - T_1 \cdot \cos 60^\circ + T_3 \cdot \cos 60^\circ + T_4 = 0 \\ F_1 \cdot \sin \alpha_1 + T_1 \cdot \sin 60^\circ + T_3 \cdot \sin 60^\circ = 0 \end{cases};$$

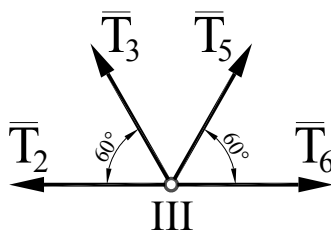


Figura 5

$$\text{III.} \begin{cases} T_6 + T_5 \cdot \cos 60^\circ - T_3 \cdot \cos 60^\circ - T_2 = 0 \\ T_3 \cdot \sin 60^\circ + T_5 \cdot \sin 60^\circ = 0 \end{cases};$$

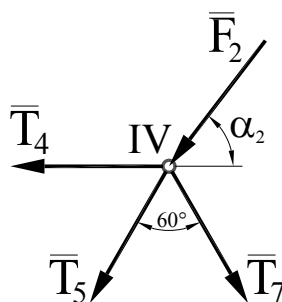


Figura 6

$$\text{IV.} \begin{cases} F_2 \cdot \cos \alpha_2 + T_5 \cdot \cos 60^\circ - T_7 \cdot \cos 60^\circ + T_4 = 0 \\ F_2 \cdot \sin \alpha_2 + T_5 \cdot \sin 60^\circ + T_7 \cdot \sin 60^\circ = 0 \end{cases};$$

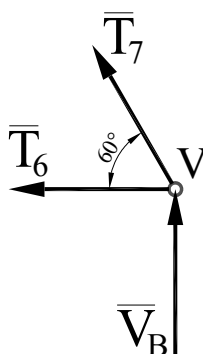


Figura 7

$$\text{V.} \begin{cases} T_6 + T_7 \cdot \cos 60^\circ = 0 \\ V_B + T_7 \cdot \sin 60^\circ = 0 \end{cases}$$

4. Pentru determinarea reacțiunilor prin metoda secțiunilor se folosesc *fig. 8* și sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} V_B - T_5 \cdot \sin 60^\circ - F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 0 \\ T_4 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} + V_B \cdot a + F_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} - F_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \frac{a}{2} = 0 \\ T_6 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} - V_B \cdot \frac{a}{2} = 0 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul rezultă: T_4, T_5, T_6 .

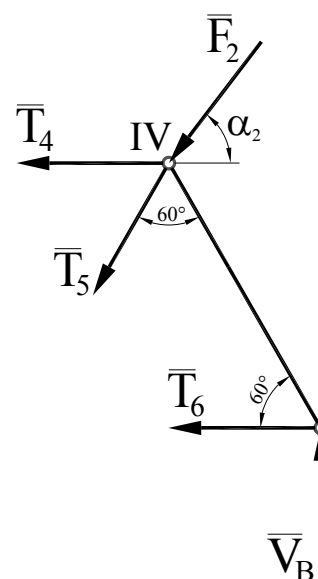


Figura 8