

DETERMINAREA ANALITICA SI GRAFICA A CENTRULUI DE GREUTATE AL UNEI PLACI PLANE

Tema lucrarii

Se considera placa omogena din figura 1. Se cere:

1. Sa se determine analitic centrul de greutate;
2. Sa se determine grafic pozitia centrului de greutate;
3. Sa se compare rezultatele analitice cu cele grafice (se calculeaza erorile ε_{rxC} si ε_{ryC}).

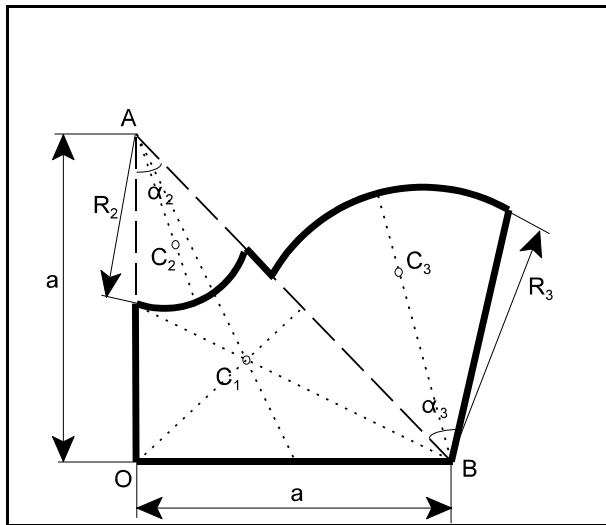


Fig. 1

$$\begin{aligned} a &= 10 + 0,5n \text{ [cm]}; \\ R_2 &= 7 + 0,1n \text{ [cm]}; \\ R_3 &= 8 + 0,2n \text{ [cm]}; \\ \alpha_2 &= 45^\circ; \\ \alpha_3 &= 40 + m^\circ \end{aligned} \quad (1)$$

unde:

n = nr. de ordine student
 m = nr. semigrupului

(de ex.:
 semigrupele 1111/1 - 1115/2 au $m=1 - 10$,
 1511/1 - 1512/2 au $m=11 - 14$, iar
 1611/1- 1612 au $m=15 - 17$).

Consideratii teoretice

Placa omogena avand o forma mai complicata poate fi impartita in bucati sau parti si tratata ca o *placa compusa omogena*:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^p \bar{r}_{Ci} A_i}{\sum_{i=1}^p A_i} \quad (2)$$

p fiind numarul de parti in care a fost impartita placa, iar A_i aria si $\bar{r}_{Ci}$ vectorul de pozitie al centrului de greutate al partii numarului i.

In cazul de fata placa se imparte in **trei parti (p=3)**: 1- *triunghiul dreptunghic isoscel AOB* care are centrul de greutate C_1 la intersectia medianelor, 2- *sectorul circular de raza R_2* , care lipseste si are centrul de greutate C_2 pe axa sa de simetrie si 3- *sectorul circular de raza R_3* care se adauga si are centrul de greutate C_3 tot pe axa sa de simetrie. Placa fiind plana sistemul de referinta va fi si el plan, iar relatia vectoriala (2) este echivalenta cu doua relatii scalare:

$$x_C^{an} = \frac{x_{C1}A_1 - x_{C2}A_2 + x_{C3}A_3}{A_1 - A_2 + A_3} \quad ; \quad y_C^{an} = \frac{y_{C1}A_1 - y_{C2}A_2 + y_{C3}A_3}{A_1 - A_2 + A_3} \quad (3)$$

Se observa ca partea care lipseste intervine in sume cu semnul minus.

Pentru partea 1 (triunghiul AOB) avem:

$$A_1 = \frac{a^2}{2}, \quad x_{C1} = \frac{1}{3}a, \quad y_{C1} = \frac{1}{3}a \quad (4)$$

Pentru partea 2 (sectorul care lipseste) avem:

$$A_2 = \left(\frac{\alpha_2}{2}\right) R_2^2,$$

$$x_{C2} = AC_2 \sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) = \frac{2}{3}R_2 \frac{\sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)}{\frac{\alpha_2}{2}} \sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) = \frac{2}{3}R_2 \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)}{\frac{\alpha_2}{2}}, \quad (5)$$

$$y_{C2} = OA - AC_2 \cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) = a - \frac{2}{3}R_2 \frac{\sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)}{\frac{\alpha_2}{2}} \cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)$$

Pentru partea 3 (sectorul care se adauga) avem:

$$A_3 = \left(\frac{\alpha_3}{2}\right) R_3^2,$$

$$x_{C3} = OB - BC_3 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_3}{2}\right) = a - \frac{2}{3}R_3 \frac{\sin\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)}{\frac{\alpha_3}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_3}{2}\right), \quad (6)$$

$$y_{C3} = BC_3 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_3}{2}\right) = \frac{2}{3}R_3 \frac{\sin\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)}{\frac{\alpha_3}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_3}{2}\right)$$

Mersul lucrării

1. Se calculează cu ajutorul relațiilor (1) dimensiunile plăcii.
2. Cu ajutorul relațiilor (4), (5), (6) și (3) se determină coordonatele centrului de greutate al plăcii pe cale analitică sau se lansează în execuție programul Centrgel.exe. Se completează următorul tabel:

Rezultate analitice

$A_1 = \dots\dots\dots [\text{cm}^2]$	$x_{C1} = \dots\dots\dots [\text{cm}]$	$y_{C1} = \dots\dots\dots [\text{cm}]$
$A_2 = \dots\dots\dots [\text{cm}^2]$	$x_{C2} = \dots\dots\dots [\text{cm}]$	$y_{C2} = \dots\dots\dots [\text{cm}]$
$A_3 = \dots\dots\dots [\text{cm}^2]$	$x_{C3} = \dots\dots\dots [\text{cm}]$	$y_{C3} = \dots\dots\dots [\text{cm}]$
$x_C^{\text{an}} = \dots\dots\dots [\text{cm}]$		$y_C^{\text{an}} = \dots\dots\dots [\text{cm}]$

3. Greutatea unei parti este proportionala cu aria ei: $G_i = \rho g A_i = k A_i$ (7)

Alegand convenabil constanta de proportionalitate $k=1$ se vor lua valorile numerice ale greutatilor egale cu valorile numerice ale ariilor.

4. Se deseneaza la scara placa ca in figura 2. In punctele C_i se traseaza greutatile G_i .

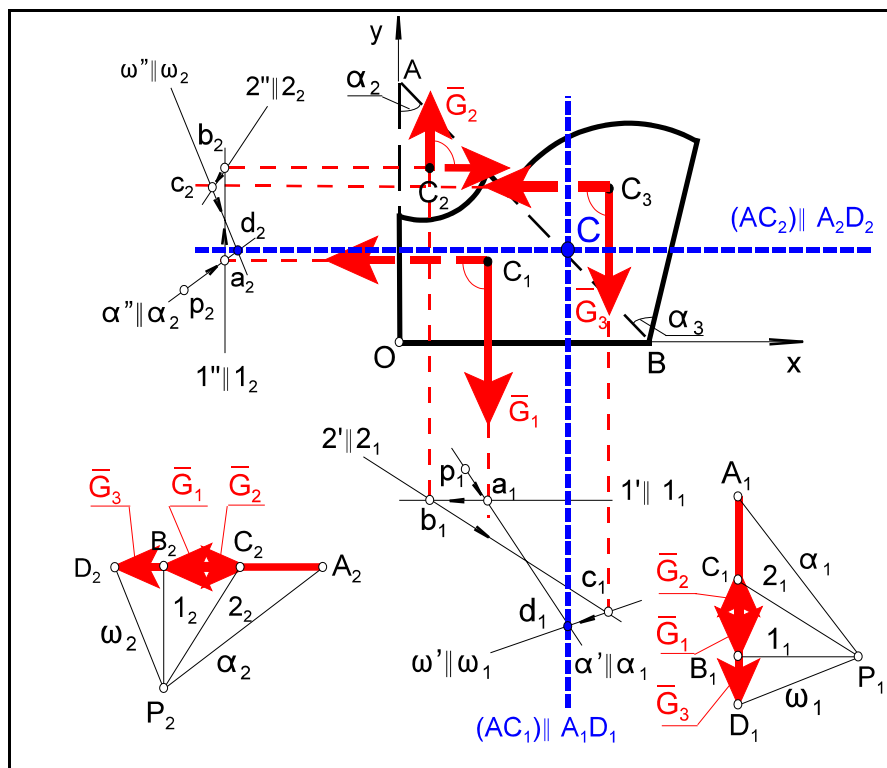


Fig. 2

5. Se construiesc poligonul fortelor $A_1B_1C_1D_1$ cu fortele de greutate reprezentate la o scara convenabila. Deoarece greutatile sunt forte paralele acest poligon degeneraza in puncte coliniare. Se alege arbitrar un punct P_1 care se uneste cu varfurile poligonului si se noteaza in ordine cu $\alpha_1, 1_1, 2_1$ si ω_1 dreptele respective. Se alege arbitrar un punct p_1 prin care ducem o dreapta $\alpha' || \alpha_1$ care va intersecta suportul greutatii G_1 in a_1 . Prin a_1 ducem dreapta $1' || 1_1$ care intersecteaza suportul greutatii G_2 in punctul b_1 . Prin b_1 ducem dreapta $2' || 2_1$ care intersecteaza suportul greutatii G_3 in punctul c_1 . In final ducem prin c_1 dreapta $\omega' || \omega_1$ care intersecteaza dreapta α' in punctul d_1 ce apartine axei centrale. De fapt am construit poligonul funicular $p_1a_1b_1c_1d_1$. Prin d_1 trasam axa centrala (AC_1) paralela cu greutatile.

6. Se rotesc greutatile cu 90° in sens orar. Se construiesc un nou poligon al fortelor notat cu $A_2B_2C_2D_2$. Se alege arbitrar un nou punct P_2 care se uneste cu varfurile poligonului notandu-se dreptele cu $\alpha_2, 1_2, 2_2$ si ω_2 . In continuare se repeta procedura de la punctul 5 construind un nou poligon funicular $p_2a_2b_2c_2d_2$ care are punctul d_2 pe noua axa centrala. Prin d_2 trasam axa centrala (AC_2) paralela cu noua directie a greutatilor. Cele doua axe centrale se vor intersecta in centrul fortelor paralele respectiv in centrul de greutate C al placii.

7. Se masoara coordonatele lui C obtinandu-se x_C^{gr} si y_C^{gr} , care se compara cu valorile analitice calculand erorile relative:

$$\varepsilon_{rxC} = \frac{|x_C^{an} - x_C^{gr}|}{x_C^{an}} \cdot 100 = \dots\dots\dots [\%] \quad \varepsilon_{ryC} = \frac{|y_C^{an} - y_C^{gr}|}{y_C^{an}} \cdot 100 = \dots\dots\dots [\%] \quad (8).$$