

REDUCEREA UNUI SISTEM DE FORTE COPLANARE PE CALE ANALITICA SI GRAFICA

Tema lucrării

Se considera o placa dreptunghiulara de dimensiuni 12x6 m solicitata de un sistem de 5 forte situate in planul placii (fig. 1). Se cere:

1. Sa se determine pe cale analitica elementele torsorului in O, ecuatiile axei centrale si distanta de la O la aceasta;
2. Sa se determine pe cale grafica vectorul rezultat R si distanta d de la O la axa centrala;
3. Sa se compare rezultatele analitice cu cele grafice (se calculeaza erorile relative ε_{rR} si ε_{rd})

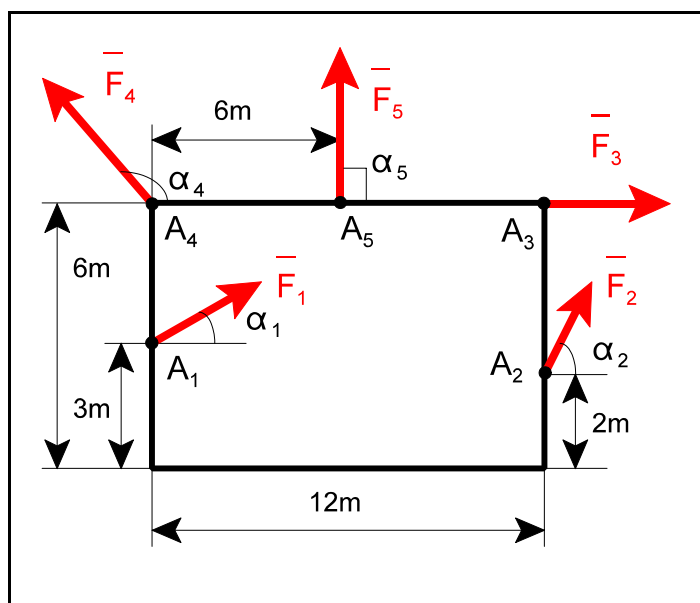


Fig. 1

$$\begin{aligned} F_1 &= 21+n \text{ [N]}; \\ F_2 &= 50-n \text{ [N]}; \\ F_3 &= 30+2n \text{ [N]}; \\ F_4 &= 10+n+3m \text{ [N]}; \\ F_5 &= 5+n+4m \text{ [N]}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 45-n \text{ [}^\circ\text{]}; \\ \alpha_2 &= 45+n \text{ [}^\circ\text{]}; \\ \alpha_3 &= 0 \text{ [}^\circ\text{]}; \\ \alpha_4 &= 90+3n \text{ [}^\circ\text{]}; \\ \alpha_5 &= 90 \text{ [}^\circ\text{]}. \end{aligned}$$

unde:

n = nr. de ordine student
m = nr. semigrupe

(de ex.:
semigrupele 1111/1 - 1115/2 au m = 1 - 10,
1511/1 - 1512/2 au m = 11 - 14, iar
1611/1 - 1612 au m = 15 - 17).

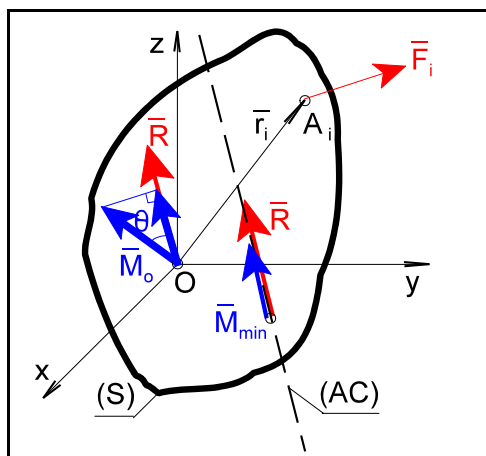


Fig. 2

Consideratii teoretice

Asupra rigidului (S) (fig. 2) actioneaza un sistem de n forte oarecare in punctele A_i avand vectorul de pozitie $\vec{r}_i$ fata de originea O a sistemului de referinta ales arbitrar:

$$\begin{cases} \vec{F}_i = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k} \\ \vec{r}_i = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k} \end{cases} \quad i = \overline{1, n} \quad (2).$$

In O sistemul de forte dat se reduce la un torsesor
($\bar{R}$, $\bar{M}_O$) oarecare:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \\ \bar{M}_O = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) \end{array} \right. \quad (3),$$

iar in raport cu punctele axei centrale (AC) la *torsesorul minimal*
($\bar{R}$, $\bar{M}_{min}$) al carui moment minim se calculeaza proiectand pe M_O pe
directia lui R :

$$M_{min} = \frac{\bar{M}_O \cdot \bar{R}}{R} \quad (4).$$

Ecuatiile analitice ale axei centrale ca intersectie a doua plane sunt:

$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_x}{R_z} \quad (5).$$

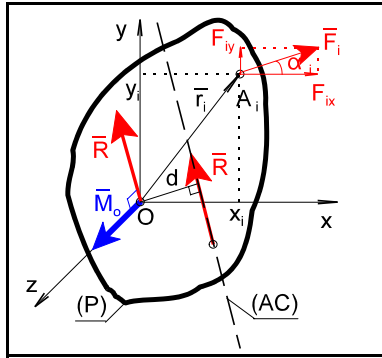


Fig. 3

In cazul unei placii plane (P) solicitata de un sistem de n forte
situate in planul placii (planul xOy) fig. 3 in relatiile (2) se fac
particularizarile: $z_i = 0$ $F_{iz} = 0$ (6). Componentele lui R si ale lui M_O
se calculeaza analitic astfel:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i \neq 0 \\ R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = \sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i \neq 0 \\ R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

Se poate

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = \sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = 0 \\ M_y = \sum_{i=1}^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = 0 \\ M_z = \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \neq 0 \end{array} \right. \quad (8)$$

observa ca vectorul rezultant $\bar{R}$ se gaseste in planul fortelor, iar
vectorul moment rezultat $\bar{M}_O$ este orientat dupa axa z normala pe
planul fortelor. Conform relatiei (4) momentul minin va fi nul $M_{min}=0$
(9), deci sistemul de forte coplanare se reduce la o *rezultanta unica* in
raport cu punctele axei centrale ($\bar{R}, 0$). Analitic din (7) avem:

$$R^{an} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (10), \text{ iar din (8) } M_O = |M_z| \quad (11).$$

Axa centrala se obtine introducand particularizarile (6) in ecuatiile (5):

$$\frac{zR_y}{R_x} = \frac{-zR_x}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_x}{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ -xR_y + yR_x + M_z = 0 \end{array} \right. \quad (12).$$

Relatia (9) este chiar conditia de valabilitate a teoremei lui Varignon $\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{R}$ (13) care ne permite

determinarea distantei de la O la axa centrala analitic: $M_O = d \cdot R \Rightarrow d^{an} = M_O / R$ (14).

Mersul lucrării

1. Se calculează mărimea forțelor și a unghiurilor cu ajutorul relațiilor (1).
2. Rezultatele analitice se obțin folosind relațiile (7), (8), (10), (11), (12) și (14) sau se lansează programul direct executabil: Rsfcopel.exe Se completează apoi următorul tabel:

Rezultate analitice		
$R_x = \dots\dots\dots[N]$	$R_y = \dots\dots\dots[N]$	$R^{an} = \dots\dots\dots[N]$
$M_z = \dots\dots\dots[Nm]$		$M_O = \dots\dots\dots[Nm]$
Ecuațiile axei centrale: $z = 0$ $\dots\dots\dots x + \dots\dots\dots y + \dots\dots\dots = 0$		
$d^{an} = \dots\dots\dots[m]$		

3. -Se alege convenabil o scară a desenului: de ex. $k_L = 2m/cm$. Se desenează placa la scară măsurând unghiurile α_i cu raportorul și se trasează forțele (vezi fig. 4).

Obs.- pe desenul plăcii mărimea forțelor nu contează!

-Se alege convenabil o scară a forțelor: de ex. $k_F = 10N/cm$. Cele cinci forțe se compun grafic utilizând metoda poligonului forțelor: se construiește un poligon având forțele drept laturi, iar ultima latură care închide poligonul reprezintă rezultanta lor. Notăm varfurile poligonului cu A, B, C, D, E și F. Ultima latură AF o notăm cu R^* și o măsurăm.

Valoarea reală a rezultantei va fi: $R^{gr} = R^*$. $k_F = \dots\dots\dots[N]$ (15).

-Se alege arbitrar un punct P lângă poligonul forțelor. Se unește P cu varfurile poligonului notând prima rază cu α , ultima cu ω , iar intermediarele cu 1, 2, 3, și 4 în ordinea varfurilor.

Obs. - în poligonul forțelor contează atât mărimea acestora cât și unghiurile!

-Alegem arbitrar un punct p undeva în apropierea lui A_1 . Prin p ducem o dreaptă $\alpha' || \alpha$ care intersectează suportul forței F_1 în punctul a. Prin a ducem dreapta $1' || 1$ care va intersecta suportul forței F_2 în punctul b. Prin b ducem dreapta $2' || 2$ care intersectează suportul forței F_3 în punctul c. Prin c ducem dreapta $3' || 3$ care intersectează suportul forței F_4 în punctul d. Prin d ducem dreapta $4' || 4$ care intersectează suportul forței F_5 în punctul e. În fine ducem prin e dreapta $\omega' || \omega$ care intersectează α' în punctul f. Acest punct aparține axei centrale a sistemului de forțe dat. Poligonul pabcdef se numește poligon funicular, iar metoda poligonului funicular permite determinarea unui punct al axei centrale.

-Cum axa centrală (AC) are aceeași orientare ca și rezultanta R este suficient să ducem prin punctul f o paralelă la R^* . Din O coborăm o perpendiculară pe axa centrală (AC), o notăm cu d^* și o măsurăm.

Valoarea reală a distanței de la O la axa centrală va fi: $d^{gr} = d^*$. $k_L = \dots\dots\dots[m]$ (16).

4. Compararea rezultatelor analitice cu cele grafice se face calculând erorile relative:

$$\varepsilon_{rR} = \frac{|R^{an} - R^{gr}|}{R^{an}} \cdot 100 = \dots\dots\dots[\%] \quad \varepsilon_{rd} = \frac{|d^{an} - d^{gr}|}{d^{an}} \cdot 100 = \dots\dots\dots[\%] \quad (17)$$

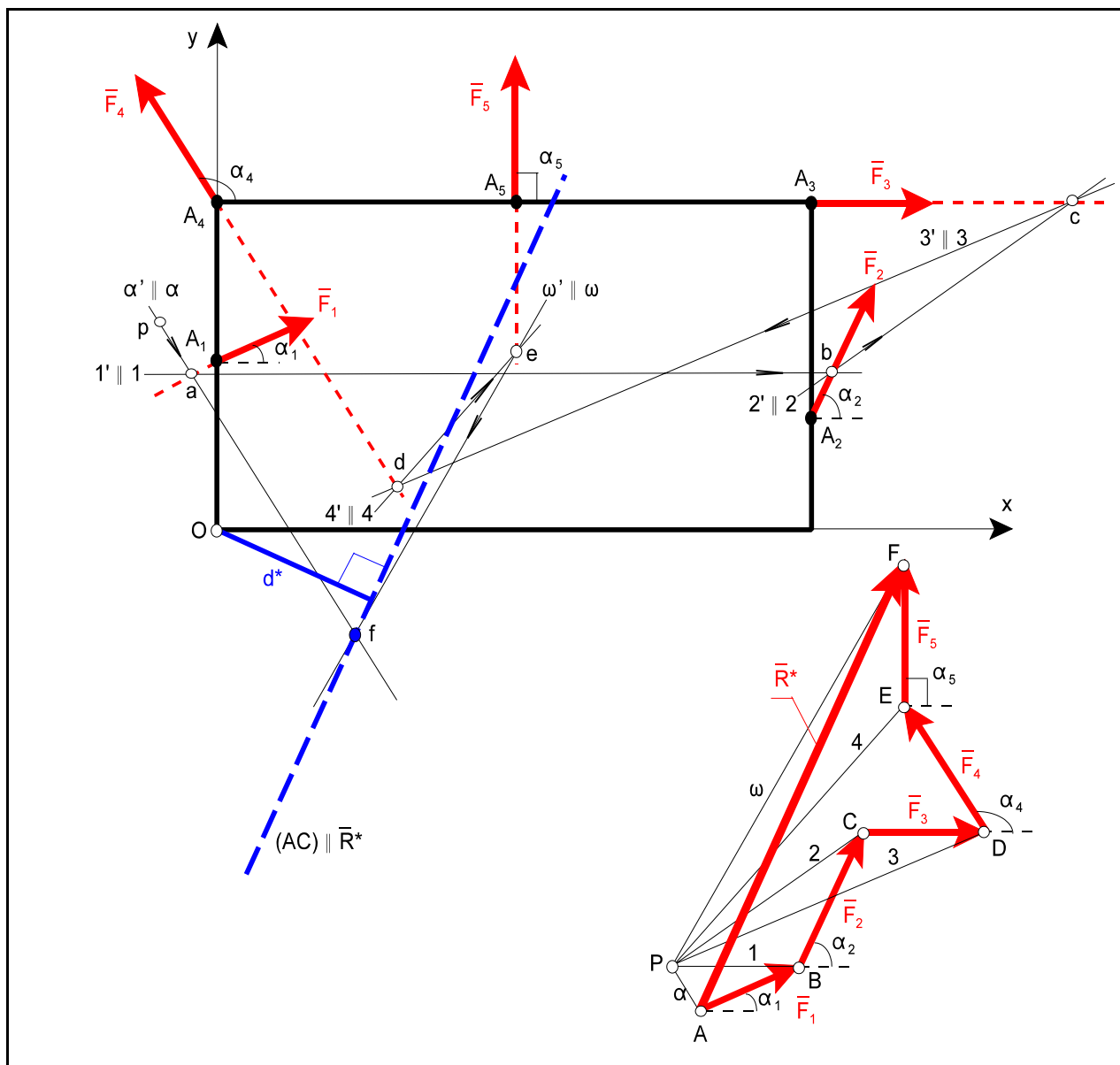


Fig. 4