

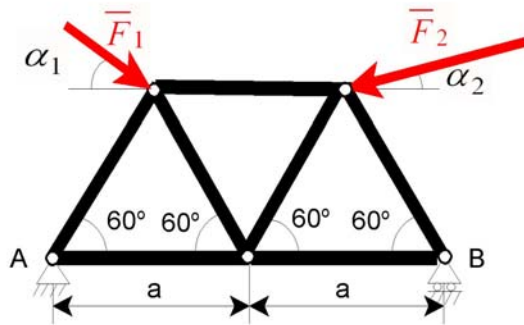
Determinarea eforturilor din barele unei grinzi cu zabrele

I. Scopul lucrării

Se determina reacțiunile și eforturile din barele unei grinzi cu zabrele.

II. Tema lucrării

Se da grinda cu zabrele din figura 1 solicitată de două forțe:



$$F_1 = 100m + 10n = \quad [\text{daN}]$$

$$F_2 = 300m + 10n = \quad [\text{daN}]$$

$$\alpha_1 = 45 + n = \quad [^\circ]$$

$$\alpha_2 = 45 - n = \quad [^\circ]$$

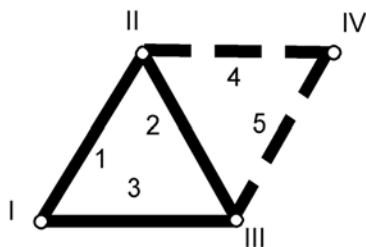
$$a = 6,5 + n = \quad [\text{m}]$$

Fig. 1

Se cere:

1. Sa se verifice dacă grinda este nemobilă și dacă este static determinată;
2. Sa se determine eforturile din bare prin metoda izolării nodurilor
3. Sa se verifice eforturile din barele 4, 5, 6 prin metoda secțiunilor (metoda Ritter)
4. Sa se determine grafic reacțiunile și sa se compare rezultatele analitice cu cele grafice.

III. Considerații teoretice



Grinda cu zabrele plană este o structură formată din bare articulate în noduri. Cea mai simplă grinda care este nedeformabilă (nemobilă sau rigidă) este formată din trei bare și trei noduri (fig. 2). Dacă mai adăugăm un nod ca să rămână rigidă trebuie să adăugăm încă două bare, s.a.m.d. Notând cu

N - numărul de noduri

b - numărul de bare

Fig. 2

rezulta **condiția de rigiditate sau de nemobilitate:**

$$b = 2N - 3$$

Necunoscutele sunt eforturile din barele grinzii cand aceasta este supusa actiunii unor forte exterioare. Legaturile cu exteriorul sunt materializate prin articulatii plane si prin reazeme simple deasemenea plane. Notand cu

r_a – numarul articulatiilor (2 necunoscute/articulatie)

r_s – numarul reazemelor simple (1 necunoscuta/reazem simplu)

se poate exprima **conditia de determinare statica** (nr.ec.= nr. nec.):

$$2N = b + 2 r_a + r_s$$

deoarece pentru fiecare nod putem scrie doua ecuatii scalare de echilibru.

Conventie: daca bara este solicitata la intindere efortul din bara iese din nod!

Numerotam nodurile cu cifre romane, iar barele cu cifre arabe (fig. 3).

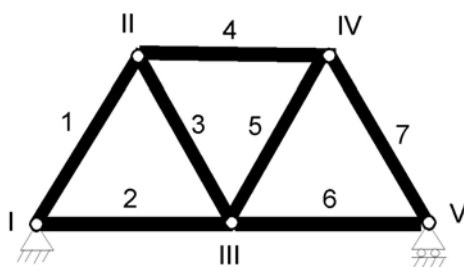


Fig. 3

Metoda izolarii nodurilor

Etape: 1. Se determina reactiunile din legaturile exterioare eliberand grinda de legaturi, introducand in locul lor forte de legatura (fig. 4) si scriind ecuatiile de echilibru astfel: o ecuatie de proiectii de forte pe orizontala si doua ecuatii de momente fata de punctele A respectiv B. In ecuatiile de momente sensul pozitiv se poate alege arbitrar, dar odata ales ramane acelasi pentru toata ecuatia:

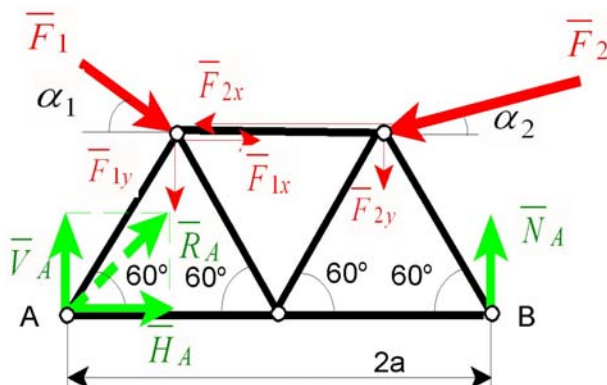
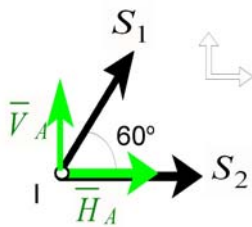


Fig. 4

$$\begin{cases} H_A + F_1 \cos \alpha_1 - F_2 \cos \alpha_2 = 0 \\ \text{(B)} \quad V_A \cdot 2a + F_1 \cos \alpha_1 \cdot a \sin 60^\circ - F_1 \sin \alpha_1 \cdot 3\frac{a}{2} - F_2 \cos \alpha_2 \cdot a \sin 60^\circ - F_2 \sin \alpha_2 \cdot \frac{a}{2} = 0 \\ \text{(A)} \quad N_B \cdot 2a - F_1 \cos \alpha_1 \cdot a \sin 60^\circ - F_1 \sin \alpha_1 \cdot a \cos 60^\circ + F_2 \cos \alpha_2 \cdot a \sin 60^\circ - F_2 \sin \alpha_2 \cdot 3\frac{a}{2} = 0 \end{cases}$$

Alegerea ecuatiilor de echilibru s-a facut astfel incat sa avem cate o singura necunoscuta intr-o ecuatie pentru simplificarea rezolvarii. Rezulta componentele H_A , V_A si reactiunea normala N_B .

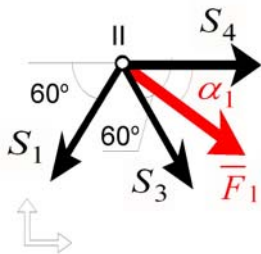
2. Se pleaca dintr-un nod in care apar numai doua bare (2 necunoscute) de exemplu nodul I (fig. 5) si se scriu cele doua ecuatii de echilibru in plan ale nodului: pe orizontala si pe verticala



$$\begin{cases} S_1 \cos 60^\circ + S_2 + H_A = 0 \\ V_A + S_1 \sin 60^\circ = 0 \end{cases} \quad \text{din care rezulta eforturile } S_1 \text{ si } S_2.$$

Fig. 5

3. Se trece la urmatorul nod cu numai doua necunoscute, de exemplu nodul II (fig. 6). Rezolvand sistemul ecuatiilor de echilibru:

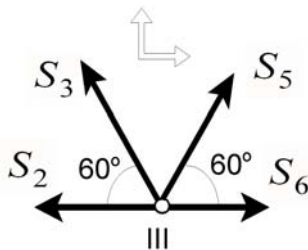


$$\begin{cases} F_1 \cos \alpha_1 - S_1 \cos 60^\circ + S_3 \cos 60^\circ + S_4 = 0 \\ F_1 \sin \alpha_1 + S_1 \sin 60^\circ + S_3 \sin 60^\circ = 0 \end{cases}$$

gasim S_3 si S_4 .

Fig. 6

4. Nodul urmator cu numai doua necunoscute este nodul III (eforturile S_2 si S_3 fiind deja determinate) (fig. 7) care are ecuatiile de echilibru:

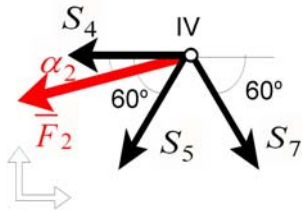


$$\begin{cases} S_6 + S_5 \cos 60^\circ - S_3 \cos 60^\circ - S_2 = 0 \\ S_3 \sin 60^\circ + S_5 \sin 60^\circ = 0 \end{cases}$$

si necunoscutele S_5 respectiv S_6 ce se obtin rezolvand sistemul celor doua ecuatii.

Fig. 7

5. A mai ramas de determinat efortul S_7 . Mergem in nodul IV (echivalent ca numar de necunoscute cu nodul V) (fig. 8). Utilizam o singura ecuatie dintre cele doua pe care le putem scrie, ecuatie de proiectii de forte pe verticala.



$$\begin{cases} S_7 \cos 60^\circ - F_2 \cos \alpha_2 - S_4 - S_5 \cos 60^\circ = 0 \\ F_2 \sin \alpha_2 + S_5 \sin 60^\circ + S_7 \sin 60^\circ = 0 \end{cases}$$

Constatam ca au ramas nefolosite trei ecuatii (una de la nodul IV si cele doua de la nodul V), pe care le putem folosi ca verificare a rezultatelor. Neutilizarea lor se explica prin determinarea prealabila a reactiunilor (trei necunoscute).

Fig. 8

Metoda sectiunilor (Ritter)

Etape: 1. Se determina reactiunile.

2. Se sectioneaza grinda respectand urmatoarele restrictii:

a) Sa nu taiem mai mult de 3 bare,

b) Cele 3 bare sa nu fie simultan concurente

in acelasi nod sau paralele intre ele (fig. 9).

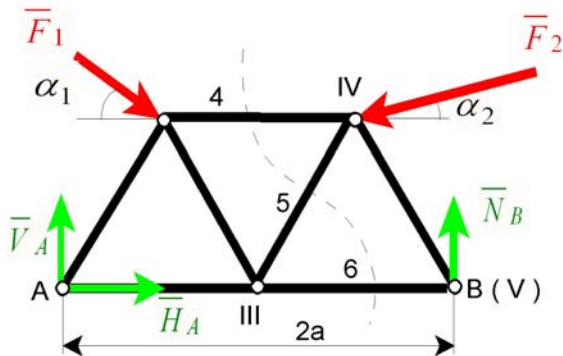


Fig. 9

3. Izolam o parte a grinzii (de exemplu partea dreapta, fig. 10) introducand in locul barelor sectionate eforturile si scriem cele 3 ecuatii de echilibru scalare pentru partea respectiva a grinzii, avand grija ca sa alegem ecuatiile astfel incat sa apara o singura necunoscuta intr-o ecuatie.

$$\begin{cases} N_B - S_5 \sin 60^\circ - F_2 \cos \alpha_2 = 0 \\ S_4 \cdot a \sin 60^\circ + N_B a - F_2 \sin \alpha_2 \cdot a \cos 60^\circ + F_2 \cos \alpha_2 \cdot a \sin 60^\circ = 0 \\ S_6 \cdot a \sin 60^\circ - N_B \cdot a \cos 60^\circ = 0 \end{cases}$$

4. Prin rezolvarea celor trei ecuatii se obtin imediat eforturile S_4 , S_5 si S_6 fara a mai fi nevoie de parcurgerea intregii grinzi din nod in nod ca in metoda izolarii nodurilor.

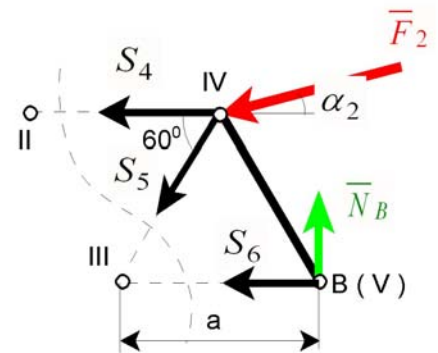


Fig. 10

IV. Mersul lucrarii

1. Stabilim topologia grinzii:

$N = 5$ noduri

$b = 7$ bare

$r_A = 1$ articulatie (2 necunoscute/articulatie)

$r_s = 1$ reazem simplu (1 necunoscuta/reazem simplu)
si verificam conditiile de rigiditate si de determinare statica:

$$2 \cdot 5 - 3 = 7 \rightarrow \text{grinda este rigida.}$$

$$7 + 2 \cdot 1 + 1 = 2 \cdot 5 \rightarrow \text{grinda este static determinata.}$$

2. Aplicam metoda izolarii nodurilor si determinam eforturile din toate cele 7 bare.

3. Determinam eforturile din barele 4, 5 si 6 prin metoda Ritter (metoda sectiunilor).

Obs. Toate calculele analitice se pot face rulant programul GRZABNOU.EXE care are ca date de intrare n=numarul de ordine al studentului din semigrupa si m=numarul de ordine al semigrupei. Cu rezultatele analitice ale programului se completeaza tabelul:

Date de intrare:		Tabel cu rezultate analitice	
Date de intrare:		Reactiunile:	
n =	(nr. ordine student)	$H_A^{an} =$	[N]
m =	(nr. semigrupa)	$V_A^{an} =$	[N]
$F_1 =$	[N]	$R_A^{an} = \sqrt{(H_A^{an})^2 + (V_A^{an})^2} =$	[N]
$F_2 =$	[N]	$N_B^{an} =$	[N]
$\alpha_1 =$	[°]		
$\alpha_2 =$	[°]		
a =	[m]		
Metoda izolarii nodurilor:		Metoda sectiunilor (Ritter):	
$S_1 =$	[N]		
$S_2 =$	[N]		
$S_3 =$	[N]		
$S_4 =$	[N]	$S_4 =$	[N]
$S_5 =$	[N]	$S_5 =$	[N]
$S_6 =$	[N]	$S_6 =$	[N]
$S_7 =$	[N]		

4. Se determina grafic reactiunile astfel:

- rigidizam grinda (o consideram ca un solid rigid) care va fi in echilibru daca sunt indeplinite conditiile vectoriale de forte si de momente:

$$\begin{cases} \overline{R} + \overline{R}_1 = 0 \\ \overline{M}_O + \overline{M}_{IO} = 0 \end{cases}$$

Prima conditie scrisa pentru grinda din fig. 11 ne conduce la:

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{H}_A + \overline{V}_A + \overline{N}_B = 0; \text{ sau } \overline{R} + \overline{R}_A + \overline{N}_B = 0$$

relatie obtinuta prin compunerea:

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \overline{R} \text{ si } \overline{H}_A + \overline{V}_A = \overline{R}_A$$

Imaginea geometrica a relatiei este un triunghi care se poate construi astfel:

-in desenul la scara (scara lungimilor) al grinzii glisam fortele desenate si ele la scara (scara fortelor) pe suporturile lor pana se intersecteaza;

-compunem F_1 cu F_2 obtinand rezultanta R si pe desenul grinzii si pe poligonul fortelor (abc);

-determinam intersectia suportului rezultantei R cu suportul reactiunii normale N_B in punctul O pe desenul grinzii;

-momentele celor doua forte sunt nule fata de O (ambele suporturi trec prin punct), prin urmare ca sa fie respectata conditia a doua de momente pentru echilibru si reactiunea R_A

trebuie sa treaca si ea prin acelasi punct O, ceea ce ne permite determinarea suportului acesteia.

-construim triunghiul celor trei forte acd (cazul ULU) ducand prin extremitatile lui R paralele la suporturile reactiunilor

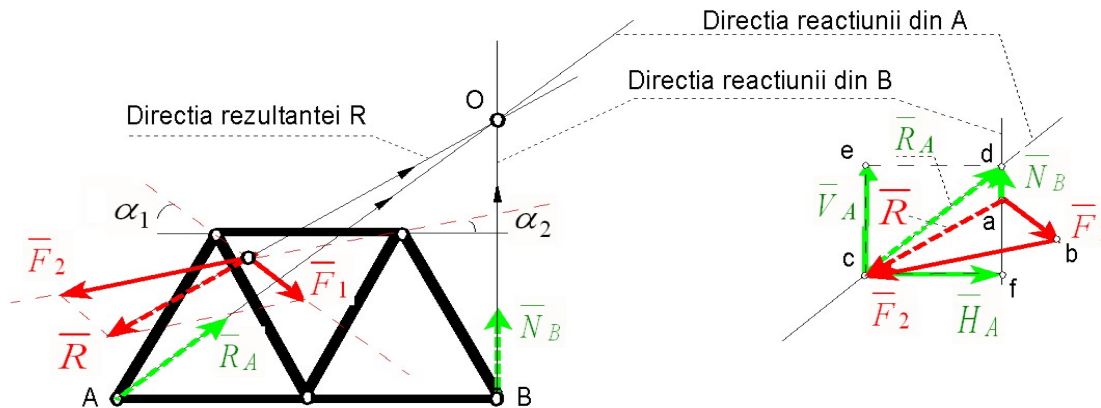


Fig. 11

-proiectam apoi reacțiunea din A pe orizontala și pe verticala obținând componentele H_A și V_A (punctele f și e în poligonul forțelor);

-măsurăm segmentele cd, ad, ce și cf le înmulțim cu scara forțelor obținând valorile reacțiunilor;

-se compară rezultatele analitice cu cele grafice calculând erorile relative între mărimea determinată pe cale analitică și mărimea determinată pe cale grafică:

$$\varepsilon_r = \frac{|v^{an} - v^{gr}|}{v^{an}} \cdot 100 = \dots\%]$$

-se completează tabelul cu rezultatele grafice:

Tabel cu rezultate grafice

Reacțiunile grafice:		Erorile relative:	
$R_A^{gr} =$	[N]	$\varepsilon_{rRA} = \frac{ R_A^{an} - R_A^{gr} }{R_A^{an}} \cdot 100 = \dots\%]$	
$H_A^{gr} =$	[N]	$\varepsilon_{rHA} = \frac{ H_A^{an} - H_A^{gr} }{H_A^{an}} \cdot 100 = \dots\%]$	
$V_A^{gr} =$	[N]	$\varepsilon_{rVA} = \frac{ V_A^{an} - V_A^{gr} }{V_A^{an}} \cdot 100 = \dots\%]$	
$N_B^{gr} =$	[N]	$\varepsilon_{rNB} = \frac{ N_B^{an} - N_B^{gr} }{N_B^{an}} \cdot 100 = \dots\%]$	